Übungsstunde 4:

Plan:

- ▷ Vektorräume (VR)
- ▷ Untervektorräume (UVR / Unterraum)
- ▷ Linearkombination
- ▷ Lineare Unabhängigkeit
- ▷ Erzeugendensystem
- ▷ Basis, Dimension

Vektorräume:

(i) $\forall u, w \in V$: $\quad u + w = w + u$

(ii) $\forall u, v, w \in V$: $\quad (u+w)+v = u+(w+v)$

(iii) $\exists\, 0 \in V$ s.d. $\forall u \in V$: $\quad u + 0 = u$ $\qquad$ 0 heisst <u>Nullvektor</u> (muss nicht "0" sein)

(iv) $\forall u \in V\ \exists -u \in V$ s.d.: $\quad u + (-u) = 0$

(v) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V$: $\quad (\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha(\beta \cdot u)$

(vi) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V$: $\quad (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

(vii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, w \in V$: $\quad \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

(viii) $\forall u \in V$: $\quad \mathbb{1} \cdot u = u$

Bsp:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ mit } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{R}^{m \times n} \text{ (Raum aller reellen } m \times n \text{ Matrizen)}$$

$$V = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$$ <u>kein</u> VR, verletzt iii)!

Untervektorraum:

Eine <u>nichtleere</u> Teilmenge $U \subseteq V$ heisst UVR falls:

(a) $\forall a, b \in U$: $\quad a + b \in U$ 1)

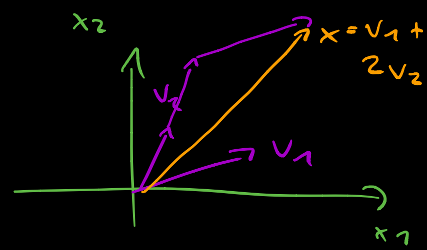
(b) $\forall a \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\quad \alpha \cdot a \in U$ 2)

Bsp: $U = \left\{ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 \cdot x_2 \geq 0 \right\}$

$$\underset{\in U}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} + \underset{\in U}{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underset{\notin U}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad ↯$$

Linearkombinationen:

Seien $v_1, v_2, \dots, v_n$ Vektoren in einem Vektorraum V und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, dann heisst



$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

die Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Bsp:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lineare Unabhängigkeit: Sei V ein VR, dann heissen die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabh., falls das LGS

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i = x_n v_n$$

nur die triviale Lösung $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ besitzt.

Bemerkung:

- Sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ nicht lin. unabh., so heissen sie lin. abh.
- Falls eine Menge den Nullvektor beinhaltet ist sie lin. abh., da:

$$0 = \underset{x_1}{1} \cdot 0 + \underset{x_2}{0} \cdot v_2 + \underset{x_3}{0} \cdot v_3 + \dots + \underset{x_n}{0} \cdot v_n$$

Bsp: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\lightning$ lin. abh.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{matrix} \quad \xrightarrow[\text{II}-2\text{I}]{\text{III}-3\text{I}} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{\text{III}-\frac{1}{2}\text{II}} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad r = 2$$

Erzeugendensystem:

Kann man jeden Vektor v eines Vektorraumes V als Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ darstellen, also

$$V = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

dann nennt man diese Vektoren ein erzeugendes System von V.
V heisst dann endlich dimensional.

Bsp: Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$:

- Die Basisvektoren $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- plus jeder beliebige Vektor!

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Merkt euch: Darf linear abhängige Vektoren beinhalten!

Bsp: $p_1(x) = x^3 + x^2$
$p_2(x) = x^2 - 2x - 4$
$p_3(x) = 3x + 4$
$p_4(x) = 2x + 3$

$\mathcal{P}_4$ erzeugbar?
$\hookrightarrow$ Alle Polynome der Ordnung ≤ 4

Umgeschrieben: Finde ich $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ s.d.:

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) + \alpha_4 p_4(x) = q(x)$$

$\forall q(x) \in \mathcal{P}_4 \Rightarrow$ nein, können x^4 nicht abbilden $\lightning$

Basis:

Intuitiv: Erzeugendensystem ohne lin. abh. Vektoren

Theorem: Falls V n-dimensional ist ($\dim(V) = n$) gilt:

(i) Mehr als n Vektoren sind lin. abhängig.

(ii) Weniger als n Vektoren sind nicht erzeugend.

(iii) Genau n Vektoren sind genau dann linear unabhängig wenn sie erzeugend sind.
Sie bilden dann eine Basis von V!

Bsp: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \cancel{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$ keine Basis vom $\mathbb{R}^3$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ keine Basis vom $\mathbb{R}^3$

Bsp: Findet Basis zu $\mathbb{R}^3$ aus

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}-2 & 1 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0\end{matrix} \quad \xrightarrow{G.} \quad \begin{matrix}-2 & 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1/2 & 0 & 3\,1/2 & 1/2\\ 0 & -1/2 & 0 & 1\,1/2 & -1/2\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{G.} \quad \begin{matrix}\boxed{-2} & 1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & \boxed{1/2} & 0 & 3\,1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 0\end{matrix} \quad \Rightarrow \text{Rang} = 3$$

Nehmen ursprüngliche Spalten zu den Pivot-Elementen:

$$\underline{\underline{\text{Basis} = \left\{ \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix} \right\}}}$$

<u>Dimension:</u>

▷ Anzahl der Vektoren, aus denen die Basis des Vektorraumes besteht

Bsp: $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ 3-Dim.

$P_4 \rightarrow \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \rightarrow$ 5-Dim.